

Дискуссия. Корпоративная отчетность: проблемы и пути их решения

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

DOI: 10.26794/2408-9303-2024-11-3-6-18

УДК 311(045)

JEL C1

Ошибки округления и их влияние на точность и достоверность статистических и финансово-экономических вычислений

В.Н. Прасолов

Финансовый университет, Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

Статистические наблюдения и вычисления неизбежно сопровождаются ошибками, носящими как систематический, так и случайный характер. Способы оценки, минимизации и устранения ошибок округления можно разработать на основе ряда известных положений из теории ошибок измерений. Ошибки округления не подчиняются нормальному закону распределения. Целью исследования является оценка их максимально и минимально допустимых абсолютных и относительных величин, обеспечивающих требуемую или заданную точность и достоверность конечных результатов при выполнении статистических и финансово-экономических вычислений на предприятиях и в организациях, проведении учебных занятий в вузах по курсу «Экономическая статистика». Обосновываются и даются рекомендации по установлению предельных значений чисел, округляемых с допустимыми или установленными абсолютными и относительными ошибками. Составлены и предложены соответствующие таблицы, приведен пример вычислений с соблюдением разработанных рекомендаций. Результаты работы могут быть полезны при проведении балансовых расчетов и подготовке финансовой отчетности.

Ключевые слова: свойства случайных ошибок; абсолютные и относительные ошибки округления; максимальные ошибки округления; связь между максимальной и средней квадратической ошибкой; предельно допустимые ошибки округления; минимальные предельно допустимые значения округляемых чисел

Для цитирования: Прасолов В.Н. Ошибки округления и их влияние на точность и достоверность статистических и финансово-экономических вычислений. *Учет. Анализ. Аудит = Accounting. Analysis. Auditing.* 2024;11(3):6-18. DOI: 10.26794/2408-9303-2024-11-3-6-18

ORIGINAL PAPER

Rounding Errors and their Impact on the Accuracy and Reliability of Statistical, Financial and Economic Calculations

V.N. Prasolov

Financial University, Moscow, Russia

ABSTRACT

Statistical observations and calculations are inevitably accompanied by errors of both systematic and random nature. Rounding errors occur both in the process of observation and in obtaining and interpreting the final results. Methods for estimating, minimizing and eliminating rounding errors can be developed based on a number of well-known provisions from the theory of measurement errors. Rounding errors do not follow the law of normal distribution. The article provides an assessment of the maximum and minimum permissible absolute and relative rounding errors that ensure the required or specified accuracy and reliability of the final results when carrying out statistical and financial-economic calculations at enterprises, organizations, and during training sessions in universities in the course "Economic Statistics". The article substantiates and gives recommendations on setting the limit values of numbers rounded off with allowable or specified absolute and relative errors. The corresponding tables have been compiled and proposed, and an example of calculations in compliance with the developed recommendations is given. The results of the work can be useful in carrying out balance sheet calculations and preparing financial statements.

© Прасолов В.Н., 2024

Keywords: properties of random errors; absolute and relative rounding errors; maximum rounding errors; relation between maximum and mean squared error; maximum allowable rounding errors; minimum limits of rounded numbers allowable values

For citation: Prasolov V.N. Rounding errors and their impact on the accuracy and reliability of statistical, financial and economic calculations. *Uchet. Analiz. Audit = Accounting. Analysis. Auditing*. 2024;11(3):6-18. (In Russ.). DOI: 10.26794/2408-9303-2024-11-3-6-18

ВВЕДЕНИЕ

Статистические наблюдения и финансово-экономические вычисления неизбежно сопровождаются ошибками, носящими систематический или случайный характер. Причины их возникновения могут быть устранены заранее. Но некоторые из них — такие, как ошибки округления, неизбежно возникают и в процессе сбора и при проведении промежуточных вычислений, и при получении и интерпретации конечных результатов. Поэтому возникает вопрос: каким образом проводить округления, чтобы минимизировать или устранить ошибки и получить точные и достоверные конечные результаты? Ответ дает теория ошибок измерений [1–4].

Ошибка измерения может быть представлена в виде разности Δ между полученным и истинным или наиболее вероятным, ожидаемым значением показателя:

$$\Delta_i = x_i - X_i, \quad (1)$$

где x_i — полученное или измеренное значение показателя или признака; X_i — истинное значение показателя или признака, каковым может быть принято среднее или наиболее вероятное, ожидаемое значение признака.

При проведении наблюдений мы получаем ряд значений признака $x_i \in \{x_1; x_2; x_3 \dots x_n\}$ и ряд ошибок измерения или наблюдения $\Delta_i \in \{\Delta_1; \Delta_2; \Delta_3 \dots \Delta_n\}$.

Может показаться, что применение в данной области информационных технологий делает проблему точности статистических наблюдений и вычислений, в том числе и ошибок округления, неактуальной.

Однако не следует забывать, что в ходе вычислений встречаются ситуации, когда одни и те же конечные результаты рассчитываются по различным формулам, проводится разложение конечных результатов по факторам, выполняются контрольные вычисления такого разложения и др. При этом не всегда обеспечивается сходимость, сравнимость и сопоставимость полученных значений.

При реализации вычислений и анализе конечных результатов в них часто задается избыточное или недостаточное количество сохраняемых знаков, обеспечивающих или не обеспечивающих требу-

емую точность, выявление особенностей, закономерностей, динамики развития того или иного социально-экономического явления или процесса. Избыточное количество знаков в сохраняемой части чисел загромождает и усложняет записи и расчеты. При проведении статистических вычислений немаловажной является и задача экономии времени и труда, затрачиваемых на них, их регистрацию [5–15].

Сказанного вполне достаточно для того, чтобы в ходе статистических работ и вычислений считать важным знание правил округления, независимо от того, какими бы методами, средствами и по каким технологиям они не проводились.

Если предположить, что ошибкам округления присущи свойства случайных ошибок, можно ожидать, что они не повлияют существенно на точность и достоверность статистических вычислений. Так ли это?

В первую очередь напомним особенности и свойства случайных ошибок, а затем проверим, присущи ли они ошибкам округления.

Сделаем это на простом примере. Рассмотрим относительно небольшой ряд из $n = 30$ значений интеграла вероятностей Лапласа $F(t)$, приведенных в учебном пособии «Экономическая статистика. Практикум»¹. Проведем их округление до трех знаков после запятой — x_i (табл. 1). Уточним при этом одно из правил, позволяющее устранить систематическую ошибку, возникающую при округлении по Бесселю — если цифра в сокращаемом разряде равна 5, то округление в сохраняемом разряде надо вести до ближайшего четного числа, т.е. по Гауссу [1]. Вычислим и проанализируем разности $\Delta_i = x_i - X_i$ (табл. 1).

Первое свойство случайных ошибок: отрицательные и положительные разности встречаются в ряду ошибок одинаково, а среди равных по абсолютному значению разностей число положительных и отрицательных одинаково или почти одинаково. В нашем примере число отрицательных и положительных разностей совпадает — и тех и других по 15

¹ Салин В.Н., Шпаковская Е.П., ред. Экономическая статистика. Практикум. Учебное пособие. М.: КНОРУС; 2022. 642 с.

Таблица 1 / Table 1

Ошибки при округлении исходных значений / Errors when rounding original values

X_i	x_i	Δ_i	Δ_i^2	X_i	x_i	Δ_i	Δ_i^2
0,8385	0,838	-0,0005	0,00000025	0,9684	0,968	-0,0004	0,00000016
0,8529	0,853	0,0001	0,00000001	0,9722	0,972	-0,0002	0,00000004
0,8664	0,866	-0,0004	0,00000016	0,9756	0,976	0,0004	0,00000016
0,8789	0,879	0,0001	0,00000001	0,9786	0,979	0,0004	0,00000016
0,8904	0,890	-0,0004	0,00000016	0,9812	0,981	-0,0002	0,00000004
0,9011	0,901	-0,0001	0,00000001	0,9836	0,984	0,0004	0,00000016
0,9109	0,911	0,0001	0,00000001	0,9857	0,986	0,0003	0,00000009
0,9199	0,920	0,0001	0,00000001	0,9876	0,988	0,0004	0,00000016
0,9281	0,928	-0,0001	0,00000001	0,9892	0,989	-0,0002	0,00000004
0,9357	0,936	0,0003	0,00000009	0,9907	0,991	0,0003	0,00000009
0,9426	0,943	0,0004	0,00000016	0,9922	0,992	-0,0002	0,00000004
0,9488	0,949	0,0002	0,00000004	0,9931	0,993	-0,0001	0,00000001
0,9545	0,954	-0,0005	0,00000025	0,9942	0,994	-0,0002	0,00000004
0,9596	0,960	0,0004	0,00000016	0,9951	0,995	-0,0001	0,00000001
0,9643	0,964	-0,0003	0,00000009	0,9956	0,996	0,0004	0,00000016
Σ						0,0004	0,00000278

Источник / Source: составлено автором на основе учебного пособия Салин В.Н., Шпаковская Е.П., ред. Экономическая статистика. Практикум. М.: КНОРУС; 2022. 642 с. / compiled by the author based on the textbook Salin V.N., Shpakovskaya E.P., eds. Economic Statistics. Workshop. Moscow: KNORUS; 2022. 642 p.

(табл. 1). Число минимальных положительных $\Delta = 0,0001$ и отрицательных разностей $\Delta = -0,0001$ одинаково и равно 4 (табл. 2).

Второе свойство случайных ошибок: они не могут превосходить по абсолютной величине определенного предела $\Delta_{\max}$, значение которого может быть легко установлено. В нашем примере максимальная ошибка округления $\Delta_{\max}$ равна половине единицы β сохраняемого разряда

$$\Delta_{\max} = \frac{\beta}{2} = \frac{0,001}{2} = \pm 0,0005. \quad (2)$$

Третье свойство — компенсация ошибок: сумма и средняя арифметическая из случайных ошибок при неограниченном возрастании числа наблюдений или измерений стремятся к нулю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum \Delta_i = 0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\Delta} = 0. \quad (3)$$

В нашем примере сумма разностей $\Sigma \Delta_i = 0,0004$ по абсолютной величине не превышает максимальную ошибку, а средняя арифметическая из ошибок округления на два порядка меньше единицы сохраняемого разряда $\beta = 0,001$:

$$\bar{\Delta} = \frac{\sum \Delta_i}{n} = \frac{0,0004}{30} = 0,0000133... \approx 0,00001. \quad (4)$$

Четвертое свойство: чем больше по абсолютной величине случайная ошибка, тем реже она встречается в ряду измерений. В рассматриваемом примере частота f_i и частоты w_i ошибок округления по абсолютным значениям распределены следующим образом (табл. 3).

Указанная закономерность в нашем примере не соблюдается. Ошибкам округления свойственно распределение, близкое к равномерному, и они не подчиняются нормальному закону распределения.

Таблица 2 / Table 2

**Положительные и отрицательные ошибки при округлении чисел /
Positive and negative errors when rounding numbers**

Δ	0,0005	0,0004	0,0003	0,0002	0,0001
Со знаком «плюс»	0	7	3	1	4
Со знаком «минус»	2	3	1	5	4

Источник / Source: составлено автором / compiled by the author.

Таблица 3 / Table 3

**Распределение ошибок округления по абсолютным значениям /
Distribution of rounding errors by absolute numbers**

$ \Delta $	0,0005	0,0004	0,0003	0,0002	0,0001	Σ
f_i	2	10	4	6	8	30
w_i	0,067	0,333	0,133	0,200	0,267	1,000

Источник / Source: составлено автором / compiled by the author.

Важным показателем, характеризующим нормальный закон распределения случайных ошибок (в том числе и ошибок округления), является средняя квадратическая ошибка:

$$\sigma_{\text{окр}} = \pm \sqrt{\frac{\sum (x_i - X_i)^2}{n}} = \pm \sqrt{\frac{\sum \Delta_i^2}{n}}. \quad (5)$$

Из теории ошибок измерений известно, что в случае, если они подчиняются нормальному закону распределения, то между средней квадратической и максимальной ошибками наблюдения существует соотношение в виде

$$\Delta_{\text{max}} \approx \pm 3\sigma. \quad (6)$$

Используя данную формулу для нашего примера, получим, что средняя квадратическая ошибка округления (табл. 1) равна:

$$\sigma_{\text{окр}} = \pm \sqrt{\frac{0,00000278}{30}} = \pm 0,0003044... \approx \pm 0,0003, \quad (7)$$

максимальная ошибка округления будет равна:

$$\Delta_{\text{max}} \approx \pm 3 \times 0,0003 \approx \pm 0,0009, \quad (8)$$

что не согласуется с ранее рассчитанной по формуле (2) максимальной ошибкой ($\Delta_{\text{max}} = \pm 0,0005$).

При установлении связи между средней квадратической ошибкой $\sigma_{\text{окр}}$ и максимальной ошибкой Δ_{max} следует иметь в виду, что ошибки округления $\Delta_{\text{окр}}$, меняясь с шагом $\alpha = \pm 0,0005$, принимают мак-

симальное значение $\Delta_{\text{max}} = \pm 0,0005$. Данный промежуток α содержится в Δ_{max} $m = 5$ раз:

$$\Delta_{\text{max}} = m \times \alpha = \pm 5 \times 0,0001 = \pm 0,0005. \quad (9)$$

Ряд возможных значений ошибок округления: $-0,0005$; $-0,0004$; $-0,0003$; $-0,0002$; $-0,0001$; 0 ; $0,0001$; $0,0002$; $0,0003$; $0,0004$; $0,0005$ насчитывает:

$$N = 2m + 1 = 11 \text{ членов.} \quad (10)$$

Среднюю квадратическую ошибку округления можно вычислить как среднюю для полученного ряда:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{окр}} &= \pm \sqrt{\frac{\sum \Delta_i^2}{N}} = \\ &= \pm \sqrt{\frac{2 \left(0,0001^2 + 0,0002^2 + 0,0003^2 + \right.}{11}} \\ &\quad \left. + 0,0004^2 + 0,0005^2 \right) = \\ &= \pm \sqrt{\frac{0,00000110}{11}} = \\ &= \pm 0,00031623 \approx \pm 0,0003. \end{aligned} \quad (11)$$

Полученное значение $\sigma_{\text{окр}}$ практически совпадает с теоретическим — $\sigma_{\text{окр}} = \pm 0,0003$. Исходя из этой величины и максимальной ошибки округления $\Delta_{\text{max}} = \pm 0,0005$ можно установить, что приблизительно связь между ними может быть выражена в виде следующего соотношения:

$$\Delta_{\max} \approx \pm 1,666... \sigma_{\text{окр}} \approx \pm 1,667 \sigma_{\text{окр}}. \quad (12)$$

На основе соответствующих теоретических выводов эту связь можно отразить и оценить более строго:

$$\sigma_{\text{окр}} \approx \pm \frac{\Delta_{\max}}{\sqrt{3}} \approx \pm \frac{\Delta_{\max}}{1,732}, \quad (13)$$

$$\Delta_{\max} \approx \pm \sigma_{\text{окр}} \sqrt{3} \approx \pm 0,0003 * 1,732 \approx \pm 0,0005. \quad (14)$$

Полученное значение свидетельствует о высокой сходимости практического и теоретического значений максимальной ошибки округления.

Рассмотренный пример позволяет сделать следующие выводы:

- в процессе наблюдения или вычислений ошибки округления могут быть заранее предопределены и учтены;
- максимальные ошибки округления $\Delta_{\max}$ не могут превышать величину, равную половине единицы сохраняемого при округлении разряда β ($\Delta_{\max} = 0,5\beta$);
- минимальные значения ошибки округления не превышают десятую часть сохраняемого разряда $\Delta_{\min} = 0,1\beta$;

- средняя квадратическая ошибка округления составляет не более $\sigma_{\text{окр}} \leq 0,3\beta$.

Для того чтобы выявить степень влияния этих ошибок на точность конечных результатов статистических наблюдений и вычислений необходимо рассмотреть и относительные ошибки округления $\Delta_{\text{отн}}$, %. Их диапазон бывает весьма значительным, и установить его можно путем сопоставления максимальных $\Delta_{\max}$ и минимальных $\Delta_{\min}$ ошибок округления с предельно малыми $X_{\min}$ и предельно большими $X_{\max}$ значениями округляемых чисел:

$$\Delta_{\text{отн}} \% = \frac{\Delta_{\min}}{X_i} 100\% = \frac{0,1\beta}{X_i} 100\%, \quad (15)$$

$$\Delta_{\text{отн}} \% = \frac{\Delta_{\max}}{X_i} 100\% = \frac{0,5\beta}{X_i} 100\%. \quad (16)$$

Примеры такого сопоставления приведены в табл. 4, 5. Из них следует, что ошибки округления могут достигать довольно больших значений — от 1,0 до 33,3% и более.

Для установления допустимых и приемлемых относительных ошибок округления можно руководствоваться следующими рекомендациями:

Таблица 4 / Table 4

Относительные ошибки округления $\Delta_{\text{отн}}$, % (в знаменателе) предельно малых и предельно больших целых чисел (в числителе) с минимальными ошибками $\Delta_{\min}$ / Relative rounding errors Δ_{rel} , % (in the denominator) of extremely small and extremely large integers (in the numerator) with minimal errors $\Delta_{\min}$

β		10	100	1 000	10 000
X_i	$ \Delta_{\min} $	1	10	100	1 000
Десятки	$X_{\min}$	11/9,1	...	...	...
	$X_{\max}$	99/1,0	...	...	...
Сотни	$X_{\min}$	101/1,0	110/9,1	...	...
	$X_{\max}$	999/0,1	990/1,0	...	...
Тысячи	$X_{\min}$	1001/0,1	1010/1,0	1100/9,1	...
	$X_{\max}$	9999/0,01	9990/0,1	9900/1,0	...
Десятки тысяч	$X_{\min}$	10001/0,01	10010/0,1	10100/1,0	11000/9,1
	$X_{\max}$	99999/0,001	99990/0,01	99900/0,1	99000/1,0

Источник / Source: составлено автором / compiled by the author.

Таблица 5 / Table 5

Относительные ошибки округления $\Delta_{\text{отн}}$, % (в знаменателе) предельно малых и предельно больших целых чисел (в числителе) с максимальными ошибками Δ_{max} / Relative rounding errors Δ_{rel} , % (in the denominator) of extremely small and extremely large integers (in the numerator) with maximum errors Δ_{max}

β		10	100	1000	10 000
X_i	$ \Delta_{\text{max}} $	5	50	500	5 000
Десятки	X_{min}	15/33,3	...	...	...
	X_{max}	95/5,3	...	...	...
Сотни	X_{min}	105/4,8	150/33,3	...	...
	X_{max}	995/0,5	950/5,3	...	...
Тысячи	X_{min}	1005/0,5	1050/4,8	1500/33,3	...
	X_{max}	9995/0,05	9950/0,5	9500/5,3	...
Десятки тысяч	X_{min}	10005/0,05	10050/0,5	10500/4,8	15000/33,3
	X_{max}	99995/0,005	99950/0,05	99500/0,5	99000/5,3

Источник / Source: составлено автором / compiled by the author.

- при проведении наблюдений или вычислений числа n -го порядка допустимо округлять до чисел $n - 1$ и меньшего порядка, но в этом случае относительные ошибки округления $\Delta_{\text{отн}}$, % могут быть весьма значительными — от 0,1 до 4,8% (табл. 6);

- числа n -го порядка целесообразно округлять до чисел $n - 2$ и меньшего порядка, поскольку относительные ошибки округления $\Delta_{\text{отн}}$, % становятся весьма незначительными — от 0,01 до 0,5% (табл. 6);

- при проведении статистических наблюдений и вычислений можно заранее установить предельно допустимые минимальные значения округляемых чисел X_{min} (табл. 7) с тем, чтобы не превысить максимально допустимую относительную ошибку округлений $\Delta_{\text{отн}}$, %; и установить эти значения можно на основе формулы относительной ошибки округления:

но допустимые минимальные значения округляемых чисел X_{min} (табл. 7) с тем, чтобы не превысить максимально допустимую относительную ошибку округлений $\Delta_{\text{отн}}$, %; и установить эти значения можно на основе формулы относительной ошибки округления:

$$X_{\text{min}} = \frac{0,5\beta}{\Delta_{\text{отн}}} = \frac{50\beta}{\Delta_{\text{отн}}\%}; \quad (17)$$

- при проведении статистических наблюдений и вычислений можно заранее установить предельно допустимые минимальные значения округляемых чисел X_{min} (табл. 7) с тем, чтобы не превысить максимально допустимую относительную ошибку округлений $\Delta_{\text{отн}}$, %; и установить эти значения можно на основе формулы относительной ошибки округления:

Таблица 6 / Table 6

Пример: диапазон относительных ошибок округления $\Delta_{\text{отн}}$, % /
Example: range of relative rounding errors Δ_{rel} , %

β	10	100	1000	10 000
Десятки	1,0–33,3	...	...	...
Сотни	0,1–4,8	1,0–33,3	...	...
Тысячи	0,01–0,5	0,1–4,8	1,0–33,3	...
Десятки тысяч	0,001–0,05	0,01–0,5	0,1–4,8	1,0–33,3

Источник / Source: составлено автором / compiled by the author.

емых чисел $X_{\min}$ (табл. 8) с тем, чтобы обеспечить требуемую или заданную среднюю квадратическую относительную ошибку округления $\sigma_{\text{окр}}\%$ и эти значения можно установить на основе соотношения между максимальной и средней квадратической ошибками:

$$X_{\min} = \frac{0,3\beta}{\Delta_{\text{отн}}} = \frac{30\beta}{\Delta_{\text{отн}}\%}. \quad (18)$$

При округлении чисел, содержащих как целые, так и дробные части, следует руководствоваться теми же правилами, что и для целых чисел. Для этого можно использовать аналогичные таблицы

предельно допустимых минимальных значений $X_{\min}$, округляемых с допустимыми ошибками (табл. 9, 10).

Правила округления при получении конечных результатов и показателей, в процессе вычисления которых применяются такие действия, как сложение и вычитание, умножение и деление, возведение в степень и извлечение корней разной степени, требуют детального рассмотрения, поскольку при выполнении названных операций мы можем получить как целые, так и дробные числа и с одинаковым, и с неравным числом знаков после запятой. Каким должно быть количество сохраняемых цифр в целых и в дробных числах? С какой точностью

Таблица 7 / Table 7

Примеры минимально допустимых чисел $X_{\min}$, округляемых с установленной предельно допустимой максимальной относительной ошибкой $\Delta_{\text{отн}}\%$ / Examples of minimum permissible numbers $X_{\min}$, rounded with a set critical permissible maximum relative error $\Delta_{\text{rel}}\%$

β	10	100	1 000	10 000
$ \Delta_{\text{отн}}\% $ / $ \Delta_{\text{max}} $	5	50	500	5 000
0,01	50 000	500 000	5 000 000	50 000 000
0,05	10 000	100 000	1 000 000	10 000 000
0,10	5 000	50 000	500 000	5 000 000
0,50	1 000	10 000	100 000	1 000 000
1,00	500	5 000	50 000	500 000

Источник / Source: составлено автором / compiled by the author.

Таблица 8 / Table 8

Примеры минимально допустимых чисел $X_{\min}$, округляемых с установленной предельно допустимой средней квадратической относительной ошибкой $\sigma_{\text{отн}}\%$ / Examples of minimum permissible numbers $X_{\min}$, rounded with the established maximum permissible root mean square relative error $\sigma_{\text{rel}}\%$

β	10	100	1 000	10 000
$\sigma_{\text{отн}}\%$ / Δ_{max}	3	30	300	3 000
0,01	30 000	300 000	3 000 000	30 000 000
0,05	6 000	60 000	600 000	6 000 000
0,10	3 000	30 000	300 000	3 000 000
0,50	600	6 000	60 000	600 000
1,00	300	3 000	30 000	300 000

Источник / Source: составлено автором / compiled by the author.

Таблица 9 / Table 9

Примеры минимально допустимых чисел $X_{\min}$, округляемых с предельно допустимой максимальной относительной ошибкой $\Delta_{\text{отн},\%}$ / Examples of minimum permissible numbers $X_{\min}$, rounded with the critical permissible maximum relative error $\Delta_{\text{rel},\%}$

β	1,0	0,1	0,01	0,001
$ \Delta_{\text{отн},\%} $ \ $ \Delta_{\text{max}} $	0,5	0,05	0,005	0,0005
0,01	5000,5	500,05	50,005	5,0005
0,05	1000,5	100,05	10,005	1,0005
0,10	500,5	50,05	5,005	0,5005
0,50	100,5	10,05	1,005	0,1005
1,00	50,5	5,05	0,505	0,0505

Источник / Source: составлено автором / compiled by the author.

Таблица 10 / Table 10

Примеры минимально допустимых чисел $X_{\min}$, округляемых с предельно допустимой средней квадратической относительной ошибкой $\sigma_{\text{отн},\%}$ / Examples of minimum permissible numbers $X_{\min}$, rounded with the maximum permissible root mean square relative error $\sigma_{\text{rel},\%}$

β	1,0	0,1	0,01	0,001
$\sigma_{\text{отн},\%}$ \ $ \sigma_{\text{max}} $	0,3	0,03	0,003	0,0003
0,01	3000,5	300,05	30,005	3,0005
0,05	600,5	60,05	6,005	0,6005
0,10	300,5	30,05	3,005	0,3005
0,50	60,5	6,05	0,605	0,0605
1,00	30,5	3,05	0,305	0,0305

Источник / Source: составлено автором / compiled by the author.

должны записываться или сохраняться промежуточные или конечные результаты, чтобы по ним были получены предельно точные, достоверные и сопоставимые показатели?

Рассмотрим некоторые операции, чаще всего встречаемые при статистических и финансово-экономических вычислениях, такие как сложение и вычитание, умножение и деление, возведение в степень и извлечение корней разной степени.

СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ЧИСЕЛ

При выполнении операций сложения и вычитания целых чисел с учетом первых трех свойств оши-

бок округления средняя квадратическая ошибка и максимальная ошибка конечного результата оказываются равными:

$$\Sigma_{\Sigma}^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2, \quad (19)$$

$$\sigma_{\Sigma} = \pm \sqrt{\Sigma_{\Sigma}^2}, \quad (20)$$

$$\Delta_{\Sigma} = \sigma_{\Sigma} \sqrt{3}. \quad (21)$$

В случае, если все слагаемые и вычитаемые округлены с одинаковой средней квадратической ошибкой $\sigma_{\text{окр}}$, средняя квадратическая ошибка и максимальная ошибка конечного результата равны:

$$\sigma_{\Sigma}^2 = n\sigma_{\text{окр}}^2, \quad (22)$$

$$\sigma_{\Sigma} = \pm \sigma_{\text{окр}} \sqrt{n}, \quad (23)$$

$$\Delta_{\Sigma} = \pm \sigma_{\Sigma} \sqrt{3n}, \quad (24)$$

т.е. увеличиваются пропорционально квадратному корню из числа n слагаемых и вычитаемых.

При сложении и вычитании целых чисел с учетом вышесказанного округление конечных результатов должно вестись следующим образом:

- при суммировании или вычитании чисел, не подвергавшихся ранее округлению, конечный результат может быть записан без него, поскольку в этих числах нет ошибок округления $\Delta_{\text{окр}} = 0$;

- при суммировании или вычитании чисел, ранее округленных с одинаковой максимальной возможной ошибкой, конечный результат должен быть округлен до чисел более высокого разряда: например, если проводится суммирование или вычитание величин, предварительно округленных до единиц $\beta = 1$ с максимально возможной ошибкой $\Delta_{\text{max}} = \pm 0,5$ и со средней квадратической ошибкой $\sigma_{\text{окр}} \approx \pm 0,3$, конечный результат должен быть округлен до десятков $\beta = 10$;

- при суммировании или вычитании исходных чисел, ранее округленных с разными максимально возможными ошибками, конечный результат должен быть округлен до разрядов, которые присутствуют в самом грубо округленном числе: например, если некоторые числа ранее были округлены до сотен $\beta = 100$, а некоторые до десятков $\beta = 10$, конечный результат должен быть округлен до сотен $\beta = 100$.

При суммировании и вычитании чисел, содержащих целую и дробную части, округление также должно проводиться с учетом свойств ошибок округления. При выполнении указанных операций возможно 2 варианта: количество знаков после запятой или не совпадает, или совпадает.

При сложении и вычитании рассматриваемых чисел округление конечных результатов должно вестись с учетом следующих рекомендаций:

- при суммировании или вычитании чисел, в которых число знаков после запятой не совпадает, их количество в конечном результате определяется числом знаков в самом грубо округленном числе, что можно проиллюстрировать на следующем примере.

Допустим, нужно провести операции сложения и вычитания трех чисел, содержащих десятые, сотые и тысячные доли.

Средняя квадратическая и максимальная ошибка конечного результата в этом случае могут достигнуть:

$$\begin{aligned} \sigma_{\Sigma} &\approx \pm \sqrt{0,03^2 + 0,003^2 + 0,0003^2} = \\ &= \pm \sqrt{0,00090909} \approx \pm 0,0302, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\Delta_{\Sigma} \approx \pm 0,0302 \sqrt{3} \approx \pm 0,05, \quad (26)$$

что соответствует максимальной ошибке округления до десятых долей.

Из сказанного следует, что при суммировании или вычитании дробных чисел с разным числом знаков после запятой целесообразно провести предварительное округление их величин до соответствующего количества знаков и лишь после этого проводить названные операции;

- при сложении и вычитании чисел с равным числом знаков после запятой количество последних в конечном результате, как правило, должно быть на единицу меньше, чем число знаков в исходных числах.

При этом следует обратить внимание, что если число слагаемых или вычитаемых $n \geq 10$, то в итоге число знаков после запятой действительно должно быть на единицу меньше.

Например, если проводятся операции сложения и вычитания чисел, ранее округленных со средней квадратической ошибкой $\sigma_{\text{окр}} = \pm 0,003$ и с максимальной ошибкой $\Delta_{\text{max}} = \pm 0,005$ и содержащих сотые доли, то максимальная ошибка конечного результата составит не менее:

$$\begin{aligned} \Delta_{\Sigma} &= \pm \sigma_{\text{окр}} \sqrt{3n} \approx 0,003 \sqrt{3 \cdot 10} \approx \\ &\approx 0,003 \cdot 5,477 \approx 0,0164 \approx 0,02, \end{aligned} \quad (27)$$

что вдвое превышает минимальную ошибку округления для десятых. Кроме того, с высокой степенью вероятности можно предположить, что в случае однонаправленности ошибок округления произойдет их накопление, и суммарная, будучи равной максимальной ошибке при округлении до десятых долей, составит не менее:

$$\Delta_{\Sigma} = \pm (10 \cdot 0,005) = \pm 0,05; \quad (28)$$

если число слагаемых или вычитаемых $n < 10$, допускается сохранение того же числа знаков после запятой, что и в исходных числах.

Например, при сложении и вычитании девяти чисел, ранее округленных до сотых долей со средней квадратической ошибкой $\sigma_{\text{окр}} = \pm 0,003$ и с макси-

мальной ошибкой $\Delta_{\max} = \pm 0,005$, то максимальная ошибка округления не превысит:

$$\Delta_{\Sigma} = \pm \sigma_{\text{окр}} \sqrt{3n} \approx 0,003 \sqrt{3 \cdot 9} \approx 0,003 \cdot 5,196 \approx 0,0156 \approx 0,02, \quad (29)$$

а в случае однонаправленности ошибок округления суммарная будет меньше максимальной ошибки округления для десятых долей и составит:

$$\Delta_{\Sigma} = \pm (9 \cdot 0,005) = \pm 0,45 \approx 0,04 < 0,05. \quad (30)$$

УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ ЧИСЕЛ

При анализе ошибок округления произведения или частного от деления средняя квадратическая ошибка конечного результата определяется на основе суммирования относительных средних квадратических ошибок округления каждого сомножителя или делимого:

$$\sigma_{\text{отн}} = \pm \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{X_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{X_2^2} + \dots + \frac{\sigma_n^2}{X_n^2}}, \quad (31)$$

$$\Delta_{\text{отн}} = \pm \sigma_{\text{отн}} \sqrt{3}. \quad (32)$$

В случае, если все сомножители или делимые округлены с одинаковой относительной средней квадратической ошибкой, то она равна относительной максимальной ошибке конечного результата:

$$\sigma_{\text{отн}} = \pm \frac{\sigma_{\text{окр}}}{X_i} \sqrt{n}, \quad (33)$$

$$\Delta_{\text{отн}} = \pm \sigma_{\text{отн}}, \quad (34)$$

т.е. относительные среднеквадратическая и максимальная ошибки произведения или частного

увеличиваются пропорционально корню квадратному из числа сомножителей или делимых n .

С учетом этой особенности ошибок округления возможны следующие ситуации:

- при делении целых чисел, ранее не подвергавшихся округлению, количество знаков после запятой в дроби может быть любым, но не менее 3-х или 4-х, поскольку сохранение такого числа цифр позволяет выразить полученное кратное отношение до десятых долей процента (0,1%) или до десятых долей промилле (0,1‰), как это принято при записи конечных показателей в системе статистических и финансово-экономических вычислений;
- при делении целых чисел, ранее округленных с одинаковой максимальной ошибкой, количество сохраняемых знаков после запятой должно быть не менее числа разрядов в целой части исходных чисел;
- при умножении или делении целых чисел на дробные для обеспечения точности и достоверности конечных результатов необходимо (как минимум в исходных дробных числах) иметь то же количество знаков после запятой, что и порядок исходного целого числа.

Насколько важны, по мнению автора, вышеуказанные рекомендации, можно продемонстрировать на следующем примере относительно несложных вычислений оценки меняющейся общей потребности в основных фондах, в том числе и по факторам (табл. 11).

Для того чтобы обеспечить максимальную точность, достоверность проводимых вычислений и сходимость результатов анализа до 1 тыс. руб. $\Delta_{\text{абс}} = \pm 1,0$ тыс. руб. с минимальной относительной ошибкой $\Delta_{\text{отн}}$, согласно вышеприведенным рекомендациям и таблицам, вычисление промежуточного

Таблица 11 / Table 11

Пример / Example

Показатель / Indicator	Базисный период / Base period	Отчетный период / Reporting period
Выпуск продукции в сопоставимых ценах Q (тыс. руб.)	67 087	75 502
Среднегодовая стоимость основных фондов $\bar{F}$ (тыс. руб.)	26 350	27 840

Источник / Source: составлено автором на основе учебного пособия Салин В.Н., Шпаковская Е.П., ред. Экономическая статистика. Практикум. М.: КНОРУС; 2022. 642 с. / compiled by the author based on the textbook Salin V.N., Shpakovskaya E.P., eds. Economic Statistics. Workshop. Moscow: KNORUS; 2022. 642 p.

показателя, а именно фондоемкости, необходимо проводить до пяти знаков после запятой:

$$e_0 = \frac{F_0}{Q_0} = \frac{26350}{67087} \approx 0,39277 \text{ руб.}, \quad (35)$$

$$e_1 = \frac{F_1}{Q_1} = \frac{27840}{75502} \approx 0,36873 \text{ руб.} \quad (36)$$

Общее изменение стоимости основных фондов:

$$\Delta F = F_1 - F_0 = 27840 - 26350 = 1490 \text{ тыс. руб.} \quad (37)$$

Из-за изменения фондоемкости:

$$\Delta F_e = (e_1 - e_0) Q_1 = (0,36873 - 0,39277) 75502 \approx -1815,068 \text{ тыс. руб.} \quad (38)$$

Из-за изменения выпуска продукции:

$$\Delta F_Q = (Q_1 - Q_0) e_0 = (75502 - 67087) 0,39277 \approx 3305,160 \text{ тыс.руб.} \quad (39)$$

В сумме оба фактора составляют:

$$\Delta F = \Delta F_Q - \Delta F_e = 3305,160 - 1815,068 = 1490,092 \text{ тыс. руб.} \quad (40)$$

При этом расхождение в абсолютном выражении значительно меньше 1 тыс. руб., а в относительном составляет не более 0,1%:

$$\Delta_{\text{отн}} = \frac{1490,092 - 1490,0}{1490,0} 100\% = 0,062\% \approx 0,1\%. \quad (41)$$

Таблица 12 / Table 12

Примеры возведения чисел в степень / Examples of raising numbers to powers

Порядок показателя степени, m / Exponent order, m	Число знаков после запятой, n / Number of decimal places, n	Показатели степени, x / Exponents, x	Число сохраняемых знаков после запятой / Number of decimal places stored	Примеры вычислений / Calculation examples
1	2	От 2 до 9	$m \cdot n = 2$	$1,242 = 1,5376 \approx 1,54$ $1,249 = 6,930988 \dots \approx 6,93$
1	3	От 2 до 9	$m \cdot n = 3$	$1,2442 = 1,547536 \approx 1,548$ $1,2449 = 7,134826606 \dots \approx 7,135$
2	2	10 и более	$m \cdot n = 4$	$1,2410 = 8,594425 \dots \approx 8,5944$
2	3	10 и более	$m \cdot n = 6$	$1,24410 = 8,875724299 \dots \approx 8,875725$

Источник / Source: составлено автором / compiled by the author.

Таблица 13 / Table 13

Примеры извлечения корней из чисел, содержащих дробную часть / Examples of extracting roots from numbers containing a fractional part

Порядок показателя степени, m / Exponent order, m	Число знаков после запятой, n / Number of decimal places, n	Степень корня, x / Root degree, x	Число знаков после запятой / Number of decimal places	Примеры вычислений / Calculation examples
1	2	2–9	$\frac{n}{m} = 2$	$\sqrt{1,54} = 1,240967 \dots \approx 1,24$ $\sqrt[3]{6,93} = 1,239980 \dots \approx 1,24$
1	3	2–9	$\frac{n}{m} = 3$	$\sqrt{1,548} = 1,244186 \dots \approx 1,244$ $\sqrt[3]{7,135} = 1,244003 \approx 1,244$
2	2	≥ 10	$\frac{n}{m} + k = 2$	$\sqrt[10]{1,54} = 1,044123 \approx 1,04$ $\sqrt[10]{8,59} = 1,239993 \approx 1,24$
2	6	≥ 10	$\frac{n}{m} + k = 2$	$\sqrt[10]{8,875725} = 1,24400001 \dots \approx 1,2440$
2	4	≥ 10	$\frac{n}{m} + k = 5$	$\sqrt[10]{887,5725} = 1,971607147 \approx 1,97161$

Источник / Source: составлено автором / compiled by the author.

ВОЗВЕДЕНИЕ В СТЕПЕНЬ И ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЕЙ

При возведении в некоторую степень чисел x , содержащих дробную часть, и при определении количества сохраняемых знаков после запятой следует учитывать количество цифр после запятой n в возводимом в степень x числе, а также порядок показателя степени m (табл. 12):

- при извлечении корня степени x из некоего числа количество сохраняемых знаков после запятой зависит от порядка показателя степени m , числа знаков после запятой n и порядка k целой части числа (табл. 13);
- при извлечении корня из целого числа количество сохраняемых знаков после запятой, как

минимум, должно быть равно сумме порядка показателя степени m и порядка k самого числа (табл. 14).

В данной статье рассмотрены лишь некоторые, основополагающие принципы проведения операций по округлению конечных результатов статистических вычислений. Содержащиеся в ней предложения и рекомендации могут быть приняты или отвергнуты. Однако, по мнению автора, они помогут сформировать более строгий и критичный взгляд на проведение вычислений — как статистических, так и финансово-экономических, на получаемые результаты и их интерпретацию, а также сделать выводы и заключения более обоснованными.

Таблица 14 / Table 14

Примеры извлечения корней из целых чисел / Examples of extracting roots from integers

Порядок показателя степени m / Exponent order, m	Порядок целых чисел, k / Order of integers, k	Число сохраняемых знаков после запятой / Number of decimal places stored	Примеры вычислений / Calculation examples
1	1	$m + k = 2$	$\sqrt{3} = 1,732050... \approx 1,73$
1	2	$m + k = 3$	$\sqrt[3]{30} = 3,107232... \approx 3,107$
2	3	$m + k = 5$	$\sqrt[10]{300} = 1,768936021 \approx 1,76894$
2	4	$m + k = 6$	$\sqrt[10]{3000} = 2,226958508... \approx 2,226958$

Источник / Source: составлено автором / compiled by the author.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Чеботарев А.С. Способ наименьших квадратов с основами теории вероятности. М.: Геодезиздат; 1958. 606 с.
2. Голубев В.В. Теория математической обработки геодезических измерений. Кн. 1. Основы теории ошибок. М.: МИИГАиК; 2005. 150 с.
3. Барлиани А.Г. Теория математической обработки геодезических измерений. Новосибирск: СГУТиК; 2016. 173 с.
4. Русяева Е.А. Теория математической обработки геодезических измерений. М.: МИИГАиК; 2016. 56 с.
5. Мелкумов Я.С. Финансовые вычисления. Теория и практика. М.: ИНФРА-М; 2021. 408 с.
6. Казакова Ю.А. Финансовый анализ. М.: Юрайт; 2015. 537 с.
7. Четыркин Е.М. Методы финансовых и коммерческих расчетов. М.: Дело; 1995. 319 с.
8. Гиляровская Л.Т. Экономический анализ. М.: Юнити-Дана; 2004. 615 с.
9. Панько Ю.В., Яшкова Н.В. Экономический анализ. М.: Мир науки; 2018. 133 с.
10. Войтоловский Н.В., Калинина А.П., Мазурова И.И. Экономический анализ. М.: Юрайт; 569 с. 2023.
11. Бариленко В.И. Комплексный анализ хозяйственной деятельности. М.: Юрайт; 2016. 463 с.
12. Аль-Натор М.С., Касимов Ю.Ф., Колесников-пени А.Н. Основы финансовых вычислений (факты, формулы, примеры и задачи). М.: Финансовый университет; 2012. 159 с.
13. Доугерти К. Введение в эконометрику. Пер. с англ. М.: Инфра-М; 1999. 401 с.

14. Айвазян С.А. Прикладная статистика. Основы эконометрики. Т. 2. М.: Юнити-Дана; 2001. 656 с.
15. Кремер Н.Ш., Путко Б.А. Эконометрика. М.: Юнити-Дана; 2003. 311 с.

REFERENCES

1. Chebotarev A.S. Least squares method with basics of probability theory. Moscow: Geodesizdat; 1958. 606 p. (In Russ.).
2. Golubev V.V. Theory of mathematical processing of geodetic measurements. Book 1. Fundamentals of theory. Moscow: MIIGAiK; 2005. 150 p. (In Russ.).
3. Barliani A. G. Theory of mathematical processing of geodetic measurements. Novosibirsk: SGUGiK; 2016. 173 p. (In Russ.).
4. Rusyaeva E.A. Theory of mathematical processing of geodetic measurements. Moscow: MIIGAiK; 2016. 56 p. (In Russ.).
5. Melkumov Ya.S. Financial calculations. Theory and practice. Moscow: INFRA-M; 2021. 408 p. (In Russ.).
6. Kazakova Yu.A. The financial analysis. Moscow: Yurayt; 2015. 537 p. (In Russ.).
7. Chetyrkin E.M. Methods of financial and commercial calculations. Moscow: Delo = Business; 1995. 319 с. (In Russ.).
8. Gilyarovskaya L. T. Economic analysis. Moscow: Unity-Dana; 2004. 615 p. (In Russ.).
9. Panko Yu.V., Yashkova N. V. Economic analysis. Moscow: Mir Nauki = The world of science, 2018. 133 p. (In Russ.).
10. Voitlovsky N.V., Kalinina A. P., Mazurova I. I. Economic analysis. Moscow: Yurayt; 2023. 569 p. (In Russ.).
11. Barilenko V.I. Comprehensive analysis of economic activities. Moscow: Yurayt; 2016. 463 p. (In Russ.).
12. Al-Nator M.S., Kasimov U. F., Kolesnikov A. N. Fundamentals of financial computing (facts, formulas, examples and tasks). Moscow: Financial University; 2012. 159 p. (In Russ.).
13. Dougherty C. Introduction to econometrics. Transl. from Eng. Moscow: Infra-M; 1999. 401 p. (In Russ.).
14. Aivaziyani S.A. Applied statistics. Fundamentals of econometrics. Vol. 2. Moscow: Unity-Dana; 2001. 656 p. (In Russ.).
15. Kremer N.S., Putko V.A. Econometrics. Moscow: Unity-Dana; 2003. 311 p. (In Russ.).

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ / ABOUT THE AUTHOR

Виктор Николаевич Прасолов — кандидат технических наук, доцент кафедры бизнес-аналитики факультета налогов, аудита и бизнес-анализа, Финансовый университет, Москва, Россия
Victor N. Prasolov — Cand. of Sci. (Tech.), Associate Professor, Department of Business Analytics, Department of Taxes, Auditing and Business Analysis, Financial University, Moscow, Russia
<http://orcid.org/0000-0002-0702-1467>
viktor_prasolov@mail.ru

Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.
Conflicts of Interest Statement: The author has no conflicts of interest to declare.

Статья поступила в редакцию 13.03.2024; после рецензирования 05.06.2024; принята к публикации 06.08.2024.

The article was submitted on 13.03.2024; revised on 05.06.2024 and accepted for publication on 06.08.2024.

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

The author read and approved the final version of the manuscript.